

Dualité de Poincaré

Exemples classiques

$\mathcal{D}(X_{\text{ét}}, \mathbb{F}_\ell)$

0) (Poincaré ?) variétés topologiques lisses $\Rightarrow H_c^{\text{dr}}(X; \mathbb{R})^\vee \cong H^i(X; \mathbb{R})$

1) (Artin, Deligne, Grothendieck, Verdier)

X schéma (propre) lisse / $k = \bar{k}$, $\dim = d$, $\ell \neq \text{char}(k)$
 $\Rightarrow H_{\text{ét}, c}^{2d-i}(X, \mathbb{F}_\ell)^\vee \cong H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{F}_\ell(d))$

2) (Berkovich, Huber)

X espace rigide analytique propre et lisse / $\mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}}$, $\dim = d$, $\ell \neq \text{char}(k)$

2') (Gabber + Zayatsov, Mann) $\ell = p = \text{char}(k)$

En termes de la dualité de Verdier: $f: X \rightarrow * = \text{Spec}(k)$ ou $\text{Spa}(\mathbb{C}, \mathbb{O}_{\mathbb{C}})$

f (propre et) lisse de $\dim = d \Rightarrow f_! \rightarrow f^! \cong f^* \otimes \mathbb{F}_\ell(d)[2d]$

Exemples de diamants à la Scholze $\sim \mathcal{D}_{\text{ét}}(X, \mathbb{F}_\ell)$ $\ell \neq p$

But. Définir une lissité pour des petits v -champs - faisceaux / $\text{Perfd}_{\mathbb{F}_p}$ relevant une surjection d'un espace perfectoïde.

Problème. Pas de critère (de relèvement) infinitésimal, car $\Omega_{X/Y}^1 = 0$
 X/Y dans $\text{Perfd}_{\mathbb{F}_p}$.

Solution/Def. f est ℓ -cohomologiquement lisse

si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ compactifiée} \\ \dim \text{trdeg } f < \infty \end{array} \right.$ $\xrightarrow{\text{deg. transcendance. topologique}}$

" $Rf_! \cong f^* \otimes L$ universellement sur la base".

Ex. $B_S^d / \mathbb{Z}^n \rightarrow S$, $\forall S \in \text{Perfd}_{\mathbb{F}_p}$

$[X/\underline{k}] \rightarrow Y$ avec $X \rightarrow Y$ coh. lisse. ($X \rightarrow [X/\underline{k}]$ pas coh. lisse)
 $\hookrightarrow K$ action libre d'un $\text{pro-}p$ groupe

$$\bullet \left[* / \underline{GL_n(\mathbb{Q}_p)} \right] \rightarrow *$$

Ceci conduit à une formulation uniforme de la dualité de Poincaré :

(Pour certain formalisme des 6 foncteurs) "lisse \Rightarrow D-coh. lisse".

Question = 1) Notion de "D-coh. lisse" pour des 6FF abstraits plus généraux.

2) Preuve uniforme de diverses dualités de Poincaré = chercher des conditions minimales qui font que "lisse \Rightarrow D-coh. lisse" et les vérifier cas par cas sur D.

Aujourd'hui 1) + 2) conditions minimales.

§1 Définitions & Énoncé de la dualité de Poincaré abstraite.

Formalisme des 3-foncteurs : i.e. foncteur lax. sym. monoidal

$$D: \text{Carr}(C, E) \longrightarrow \text{Cet} \otimes \otimes$$

cor-cat
avec produits finis

↑ classe de morphismes stables par pullback & composition
contenant les iso.

Déf. Un morphisme $f \in E$ $X \rightarrow Y$ est D-coh. lisse

si (i) $f! \dashv \overline{=} f^!$ et $f^* \otimes f^! 1_Y \xrightarrow{\text{coproj}} f^!$ est \cong

(ii) $f^! 1_Y$ est \otimes -inversible dans $D(X)$

(iii) \forall carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

(i), (ii) restent valables

et $g'^* f^! 1_Y \xrightarrow{\text{cobch}} f'^! g^* 1_Y = f'^! 1_Y$, est \cong .

Rmq. 1) si $f_! \dashv \overline{=} f^!$, alors $f_! (f^* \otimes f^! 1_Y) \cong \overline{=} f^! \otimes f_! f^! 1_Y \xrightarrow{- \otimes \text{carré}} - \otimes 1_Y \cong -$
 $\rightsquigarrow f^* \otimes f^! 1_Y \rightarrow f^!$ "Coprojection".

2) Si $f! \rightarrow f'$, $f'_! \rightarrow f''!$, alors $f'_! g'^* f! \cong g'^* f! f'_! \xrightarrow{g'^*(\text{cunité})} g'^*$
 $\leadsto g'^* f! \rightarrow f''! g'^*$ "cochangement de base"

3) f D-coh. lisse $\Rightarrow g'^* f! \xrightarrow{\text{cobch}} f''! g'^*$ est \cong .

En effet, $g'^* f! \xleftarrow{\cong} g'^*(f^* \otimes f'_! \gamma) \cong g'^* f^* \otimes g'^* f'_! \gamma$
 $\downarrow \cong \text{cobch}$
 $f''! g'^* \otimes f''! g'^* \gamma$
 \cong
 $f''! g'^* \xleftarrow{\cong} f''! g'^* \otimes f''! \gamma$

vérifions que ceci correspond par $f'_! \rightarrow f''!$ à :

$$g'^* f! f'_! \xleftarrow{\cong} g'^* f! (f^* \otimes f'_! \gamma) \xrightarrow{\cong} g'^* f^* \otimes g'^* f'_! \gamma$$

$$\downarrow \cong \text{cobch} \quad \circlearrowright \quad \downarrow \text{cobch} \quad \circlearrowright \quad \downarrow \text{cunité}$$

$$f'_! g'^* f! \xleftarrow{\cong} f'_! g'^* (f^* \otimes f'_! \gamma) \cong f'_! (f'^* f^* \otimes g'^* f'_! \gamma) \cong g'^* \otimes f'_! g'^* f'_! \gamma \cong g'^* \otimes g'^* f'_! \gamma$$

$$\downarrow \cong \text{cobch} \quad \circlearrowright \quad \downarrow \text{cobch} \quad \circlearrowright \quad \downarrow \text{cunité}$$

$$f'_! f''! g'^* \xleftarrow{\cong} f'_! (f''! g'^* \otimes f''! \gamma) \cong g'^* \otimes f'_! f''! \gamma \xrightarrow{\text{cunité}} g'^* \otimes \gamma$$

$$\downarrow \quad \circlearrowright \quad \downarrow$$

$$g'^* \leftarrow g'^* \otimes f'_! f''! \gamma$$

c'est identifié ainsi par commutativité à $f'_! g'^* f! \cong g'^* f! f'_! \xrightarrow{\text{cunité}} g'^*$.

4) D-coh. lissité est stable par composition & changement de base

Commutativité sont encodées dans $\text{lawr}(L, E)$ & les sym. monoidalité de \mathcal{D} .

• $f^* = \mathcal{D}(\begin{matrix} & & x \\ & \swarrow & \parallel \\ y & & x \end{matrix})$ est symétrique monoidal :

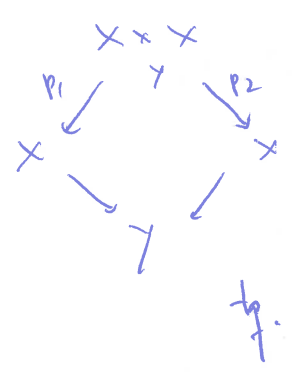
$$\mathcal{D}(\begin{matrix} & & x \\ & \swarrow & \parallel \\ y & & x \end{matrix}) = \mathcal{D}(\begin{matrix} & & y & & x \\ & \swarrow & \parallel & \searrow & \parallel \\ (y, y) & & y & & x \end{matrix}) = f^*(- \otimes -)$$

$$= \mathcal{D}(\begin{matrix} & & (x, x) & & x \\ & \swarrow & \parallel & \searrow & \parallel \\ (y, y) & & (x, x) & & x \end{matrix}) = (f^* -) \otimes (f^* -)$$

Thm. $f \in E$
 $f: X \rightarrow Y$ est D -coh. lisse

$\Leftrightarrow \exists$ théorie de cycle-trace $(L, c_\Delta, \text{trg})$ sur f .

C'est ~~un~~ triple: $L \in D(X)$. \otimes -invertible



$c_\Delta = \Delta: 1_X \rightarrow p_2^* L$ dans $D(X \times_Y X)$ "application de cycles"

$\text{trg} = f_! L \rightarrow 1_Y$ dans $D(Y)$ "trace"

(Adj₁) $1_X \cong p_{1!} \Delta! 1_X \xrightarrow{p_{1!} c_\Delta} p_{1!} p_2^* L \cong f^* f_! L \xrightarrow{f^* \text{trg}} f^* 1_Y \cong 1_X$

(Adj₂) $L \cong p_{2!} (p_1^* L \otimes \Delta! 1_X) \xrightarrow{p_{2!} (p_1^* L \otimes c_\Delta)} p_{2!} (p_1^* L \otimes p_2^* L) \cong p_{2!} p_1^* L \otimes L \cong f^* f_! L \otimes L$

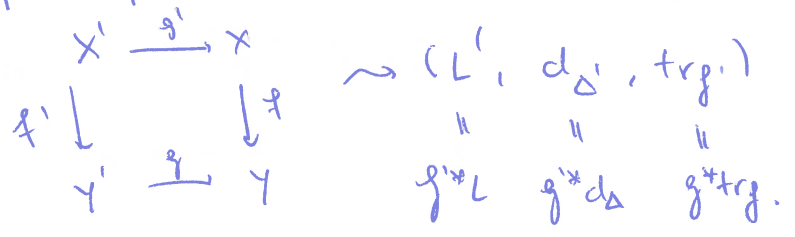
$(f^* \otimes L) \text{trg}, f^* 1_Y \otimes L \cong L$

sont homotopique à l'identité ($\text{id}_{1_X} / \text{id}_L$)

ou exactement l'identité dans $\mathcal{H}_D(X)$.

Rmq. Dans ce cas, $\text{trg} = f_! L \rightarrow 1_Y$ correspond à $L \xrightarrow{\cong} f^* 1_Y$.

Rmq. (Adj₁) & (Adj₂) passent au changement de base quelconque



$g^*(\text{Adj}_1)$ & $g^*(\text{Adj}_2)$ sont identifiées à (Adj₁') & (Adj₂') par changement de base + formule de projection

eg. $1_{X'} \cong p_{1!}' \Delta'! 1_{X'} \xrightarrow{p_{1!}' c_{\Delta'}} p_{1!}' p_{2!}'^* g'^* L \cong f'^* f'_! g'^* L \xrightarrow{f'^* \text{trg}'_!} f'^* 1_{Y'} \cong 1_{X'}$

$g^*(1_X \cong p_{1!} \Delta! 1_X \xrightarrow{p_{1!} c_\Delta} p_{1!} p_2^* L \cong f^* f_! L \xrightarrow{f^* \text{trg}} f^* 1_Y \cong 1_X)$

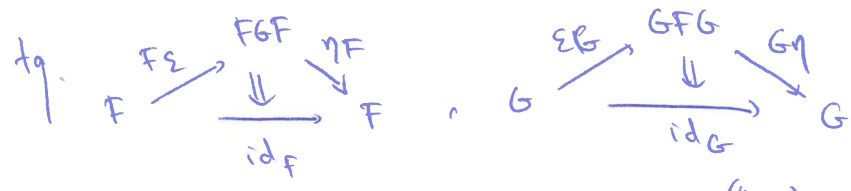
Rmq. On peut supprimer des deux côtés la \otimes -invertibilité (voir la preuve).

Adjonction :

\mathcal{L}, \mathcal{D} ∞ -catégorie: $\mathcal{L} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$. Foncteurs anti-parallèles.

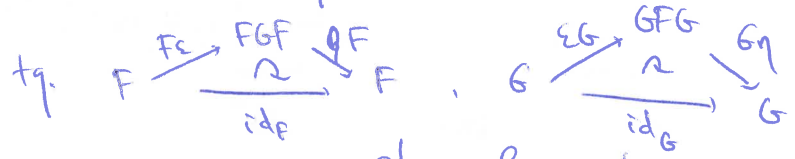
$F \dashv G \iff \exists \varepsilon = id \rightarrow GF$ transf. naturelle
 (Lurie) Lurie
 $\forall c \in \mathcal{L}, d \in \mathcal{D}$. $Hom_{\mathcal{D}}(F(c), d) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{L}}(c, G(d))$
 est une équivalence de ∞ -groupoïdes.

$\iff \exists \varepsilon = id \rightarrow GF, \eta = FG \rightarrow id$ transf. naturelles
 Right-Verity



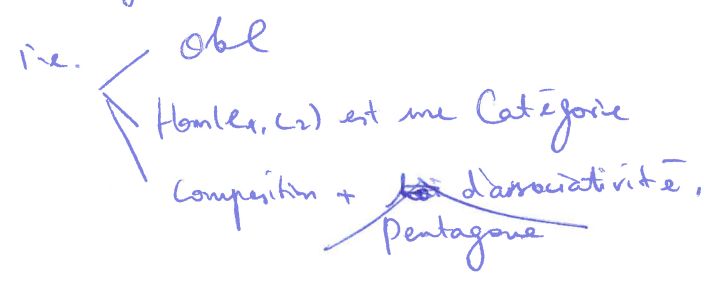
où \Downarrow est un 3-morphisme dans $Cat_{\infty}^{(0,1,2)}$
 Ob. - \mathcal{L} ∞ -cat
 Fun(\mathcal{L}, \mathcal{D}) ∞ -cat.

$\iff \exists \varepsilon = id \rightarrow GF, \eta = FG \rightarrow id$ transf. nat



dans Cat_{∞}^2
 Ob. - \mathcal{L} ∞ -cat
 $Hom(e_1, e_2) = \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{D})$
 composition.

Def. Une 2-catégorie = catégorie \mathcal{L} faiblement enrichie en Cat_1 "bicatégorie"



Def. (Joyal) \mathcal{L} 2-catégorie, $C_1 \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} C_2$

$F \dashv G$ est une 2-adjonction si $\exists \varepsilon = id \rightarrow GF, \eta = FG \rightarrow id$ 2-morph.



Ex. $\mathcal{L}, \mathcal{D} \in Cat_{\infty}^2$, $\mathcal{L} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$

$F \dashv G$ (Lurie) \iff $F \dashv G$ (Joyal)

Lem. Les 2-foncteurs (i.e. pseudo-foncteur, qui préserve les identités & les compositions à des isomorphismes près, de façon cohérente) préservent les 2-adjonctions dans des 2-catégories.

Prop. (i). (G, α, β) est unique à un iso (de triples) près.

(ii)
$$F \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{Fa'} & FGF \\ & \searrow & \downarrow \beta F \\ & & F \end{array} \xrightarrow{id_F} F \quad \& \quad G \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha' G} & GFG \\ & \searrow & \downarrow G\beta \\ & & G \end{array} \xrightarrow{id_G} G \Rightarrow \alpha' = \alpha''$$

(iii)
$$F \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{Fa'} & FGF \\ & \searrow & \downarrow \beta F \\ & & F \end{array} \xrightarrow{\text{un iso}} F \quad \& \quad G \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha' G} & GFG \\ & \searrow & \downarrow G\beta \\ & & G \end{array} \xrightarrow{\text{un iso}} G \Rightarrow \text{peut modifier } \alpha' \text{ et } \alpha'' \text{ tq. } F \rightarrow G \text{ via } (\alpha, \beta)$$

Sur l'isomorphisme $L \cong P_2! (P_1^* L \otimes \Delta! 1_x) \cdot \forall L \in \mathcal{D}(x) :$

$$P_2! (P_1^* L \otimes \Delta! 1_x) \xrightarrow[\text{pour } \Delta]{\text{proj}} P_2! \left(\underbrace{\Delta!}_{id!} \left(\underbrace{\Delta^* P_1^* L \otimes 1_x}_{id^*} \right) \right) \cong L$$

$\Rightarrow P_2! (P_1^* - \otimes \Delta! 1_x) \cong id_{\mathcal{D}(x)}$ équivalence naturelle.

§2. Transformée de Fourier-Mukai, la catégorie $de_{\mathbb{Z}}^D$ (Lu-Zheng, Fargues-Scholze)

Def.
$$\begin{array}{ccc} & X_1 \times X_2 & \\ P \swarrow & \gamma & \searrow P_2 \\ X_1 & & X_2 \\ \downarrow EE & & \downarrow \\ & Y & \end{array} \rightsquigarrow \forall K \in \mathcal{D}(X_1, X_2) \text{ "noyau"}$$

 sa transformée de FM est le foncteur $FM_K := P_2! (P_1^* - \otimes K) : \mathcal{D}(X_1) \rightarrow \mathcal{D}(X_2)$

Ex. (i).
$$\begin{array}{ccc} & X & \\ P \swarrow & \gamma & \searrow P \\ X & & Y \\ \downarrow EE & & \downarrow \\ & Y & \end{array} \quad \forall K \in \mathcal{D}(X) \rightsquigarrow FM_K = f! (- \otimes K)$$

(ii)
$$\begin{array}{ccc} & X & \\ P \swarrow & \gamma & \searrow P \\ Y & & X \\ \downarrow EE & & \downarrow \\ & Y & \end{array} \quad \forall K \in \mathcal{D}(X) \rightsquigarrow FM_K = (P^* -) \otimes K$$

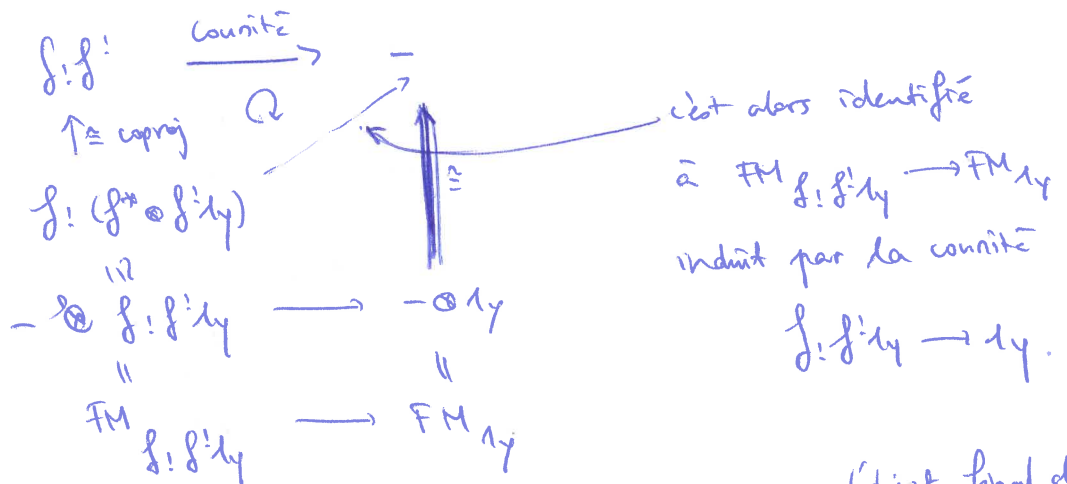
(iii)
$$\begin{array}{ccc} & X \times X & \\ P_1 \swarrow & \gamma & \searrow P_2 \\ X & & X \\ \downarrow EE & & \downarrow \\ & Y & \end{array} \quad \forall K \in \mathcal{D}(X \times X) \rightsquigarrow FM_K = P_2! (P_1^* - \otimes K)$$

En particulier, $X \xrightarrow{\Delta} X \times X \rightsquigarrow FM_{\Delta! 1_X} \cong id_{\mathcal{D}(X)}$

(iv)
$$\begin{array}{ccc} & X & \\ P \swarrow & \gamma & \searrow P \\ Y & & Y \\ \downarrow EE & & \downarrow \\ & Y & \end{array} \quad \forall K \in \mathcal{D}(Y) \rightsquigarrow FM_K = - \otimes K$$

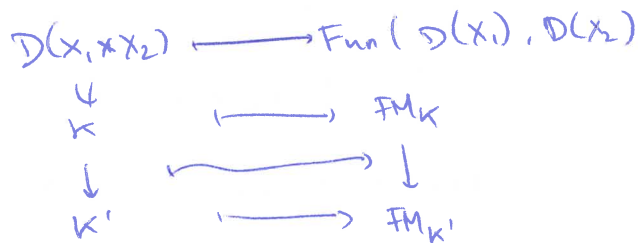
Ainsi $\sqrt{f \text{ est } D\text{-coh. lisse}} \iff \left\{ \begin{array}{l} FM_{1x} \rightarrow \exists f! \text{ et } FM \xleftarrow{f!} 1_y \\ f! : 1_y \in D(x) \text{ @-inv} \\ + \text{ changement de base} \end{array} \right.$

Ex. Si f est D -coh. lisse, via coproj. isomorphe:



Pour la preuve du théorème (supposons désormais $\mathcal{V} = *$ l'objet final de \mathcal{L})

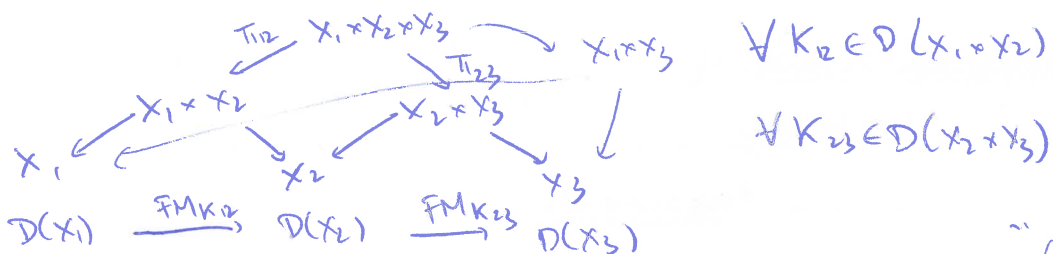
- 1) construire une 2-catégorie LZ_D
 - objet = $Ob \mathcal{L}$
 - $Hom(x_1, x_2) = D(x_1 \times x_2)$ - 1-cat
- 2) construire un 2-foncteur : $LZ_D \rightarrow Cat^2$
 - $x \mapsto D(x)$



Ce qui manque: Comp = $- * -$ \mapsto composition de foncteurs

- 3) Faire un lien entre ^{certaines} 2-adjonctions dans LZ_D & d'autres dans Cat^2 .

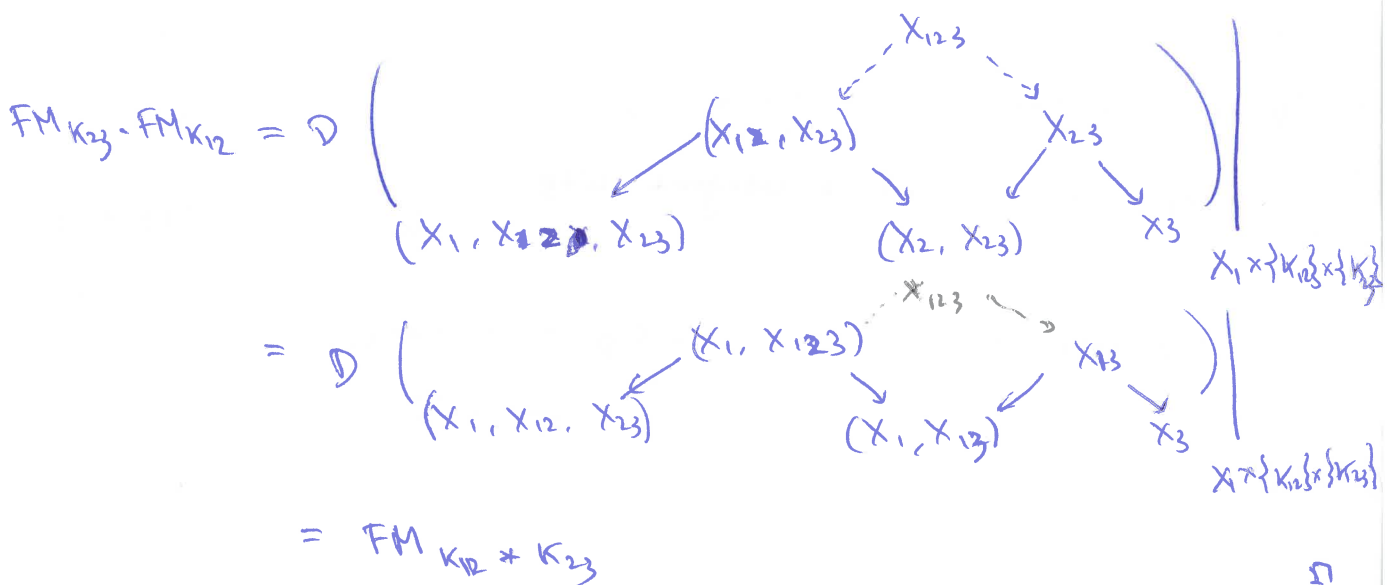
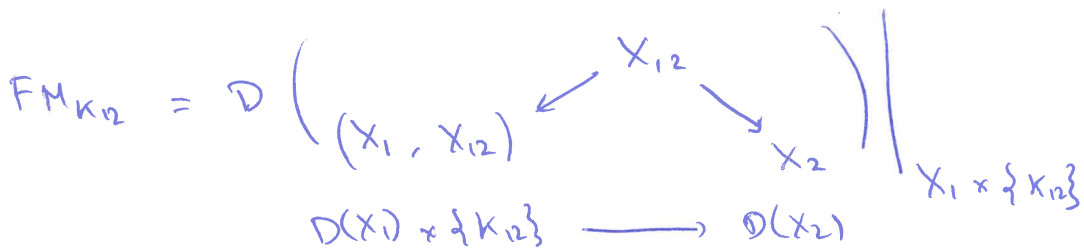
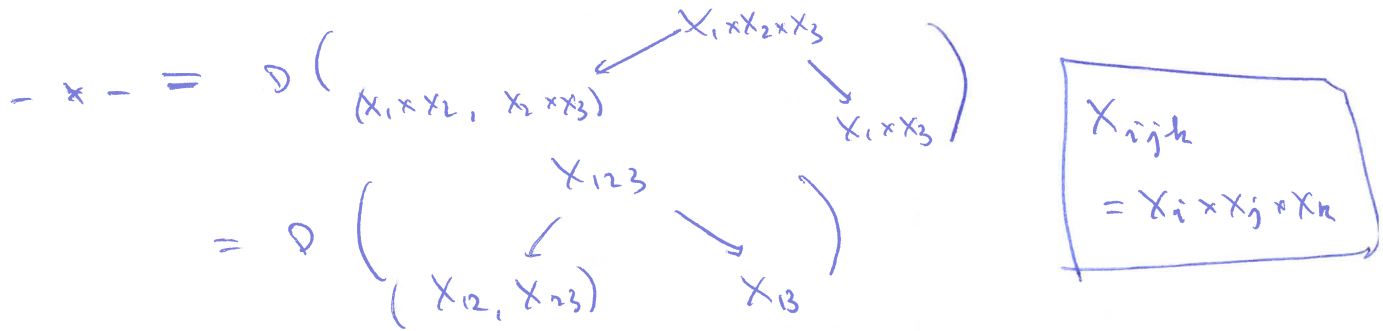
Lem/Def.



$\Rightarrow FM_{K23} \circ FM_{K12} \cong FM_{K13}$ avec $K13 = \pi13! \left(\pi12^* K12 \otimes \pi23^* K23 \right) = K12 * K23$ "Convolution"

Dém. • changement de base + formule de projection + composition associativité de (*) (4)

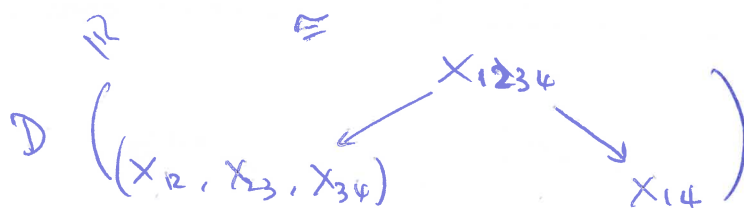
• Alternativement il y a une preuve schématique / par dessin de correspondance



La preuve utilise des 2-simplices dans $\text{Car}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

En jouant avec des 3-simplices, on obtient :

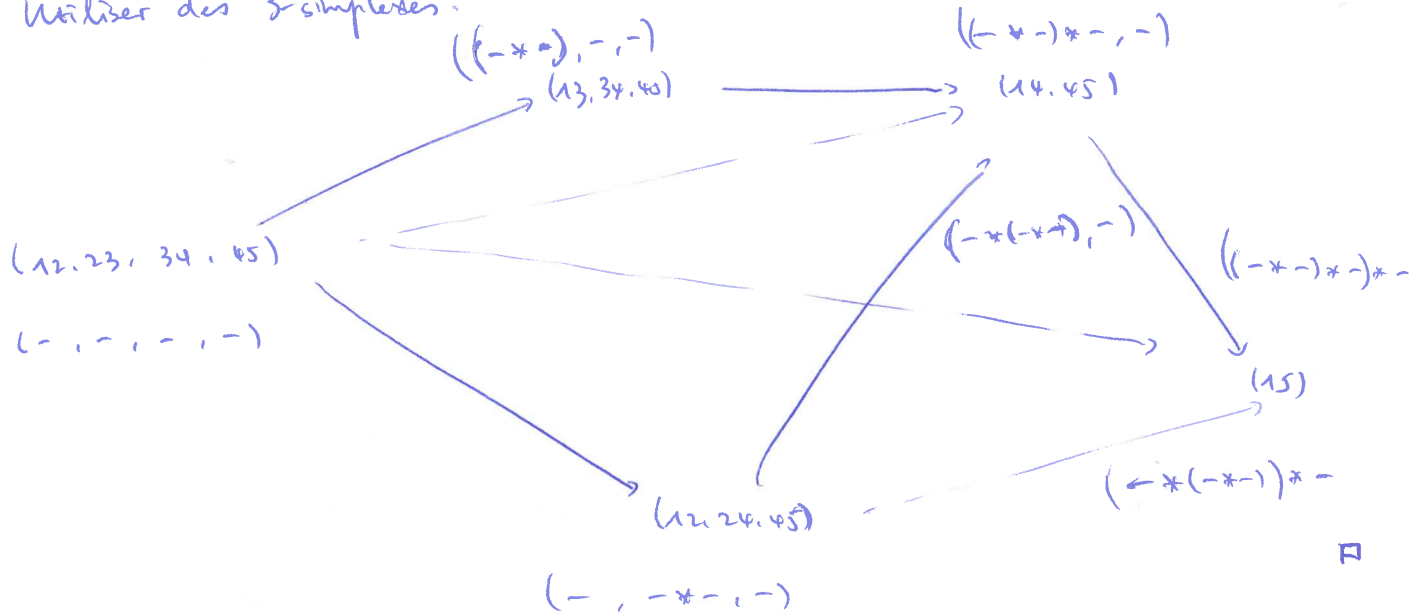
Lem. \exists transf. nat $(- *) * - \cong - * (- * -)$



tg. le pentagone d'associativité commute dans Cat_{∞}^2 .

(ou \cong une homotopie près dans $\text{Cat}_{\infty}^{(\infty, 2)}$)

Dém. Utiliser des 3-simplices.



Ainsi.

Def. (Lu-Zheng, Fargues-Scholze) $\mathcal{D} = \text{Corr}(\mathcal{L}, \mathbb{F}) \xrightarrow{\gamma = *}$ Cat_∞ 3 foncteurs

La 2-catégorie des correspondances \mathcal{D} -cohérentes.

est $\mathcal{L}Z_{\mathcal{D}}$

- $\text{ob} = \text{ob Corr}(\mathcal{L}, \mathbb{F}) = \text{ob } \mathcal{D}$
- $\text{Hom}_{\mathcal{L}Z_{\mathcal{D}}}(x_1, x_2) = \mathcal{D}(x_1, x_2)$ — 1-cat.
- Composition = $- * -$.

C'est bien défini par le lemme précédent.

2-foncteurs: $\mathcal{L}Z_{\mathcal{D}} \longrightarrow \text{Cat}_\infty$

$x \longmapsto \mathcal{D}(x)$

$\mathcal{D}(x_1, x_2) \longmapsto \text{Fun}(\mathcal{D}(x_1), \mathcal{D}(x_2))$

$\downarrow \mathbb{K} \longmapsto \text{FM}_{\mathbb{K}}$

$- * - \longmapsto$ composition de foncteurs.

une construction ∞ -catégorique (à la Zavyalar)

Def. le ∞ -cat (sym) monoidal est fermé (close si $\forall x, x \otimes - \dashv \exists F(x, -)$)

$\rightarrow F(x_1, x_2) \otimes F(x_2, x_3) \rightarrow F(x_1, x_3)$

(qui correspond à $x_1 \otimes F(x_1, x_2) \otimes F(x_2, x_3) \rightarrow x_2 \otimes F(x_2, x_3) \rightarrow x_3$)

+ propriété de cohérence supérieure (associativité)

\uparrow proprement définie via redressement (straightening-unstraightening)

Thm (Gepner - Hovey, Cor 7.4. Enriched ω -cat via non-sym ω -operads, Cor 7.4.9)

\mathcal{L} ω -cat. (sym) mon. fermée

Cor 7.4.9

$\Rightarrow \mathcal{L}$ enrichie en elle-même, i.e. $(\mathcal{L}, \text{Hom}(\bullet, \bullet))$ forme une catégorie supérieure

$F(-, -) \in \mathcal{L}$

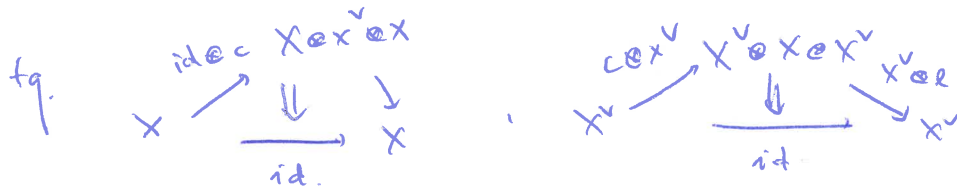
(cohérence supérieure = associativité)

Un exemple est donné par une ω -cat (sym) ~~rigide~~ monoidale rigide

Def. \mathcal{L} ω -cat (sym) monoidale, est rigide si $\forall X \in \text{Obl}$ est dualisable (à gauche)

i.e. $\exists X^V \in \text{Obl}$, $\exists e = X \otimes X^V \rightarrow 1$ "évaluation"

$c = 1 \rightarrow X^V \otimes X$ "coévaluation"



Lem. $X \in \text{Obl}$ dualisable (à gauche) de dual $X^V \Rightarrow X \otimes - \rightarrow X^V \otimes -$

via $\text{Hom}(X \otimes A, B) \cong \text{Hom}(A, X^V \otimes B)$

$(X \otimes A \xrightarrow{f} B) \rightsquigarrow (A \xrightarrow{c \otimes X^V} X^V \otimes X \otimes A \xrightarrow{X^V \otimes f} X^V \otimes B)$

$(X \otimes A \xrightarrow{X \otimes g} X \otimes X^V \otimes B \xrightarrow{e \otimes B} B) \longleftarrow (A \xrightarrow{g} X^V \otimes B)$

D'autres exemples se produisent par foncteur $\mathcal{V} \xrightarrow{F} \mathcal{V}'$ foncteur lax monoidal (sym.)

ω -cat (sym) monoidales

\mathcal{L} enrichie en $\mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{L}$ enrichie en \mathcal{V}'

$(\mathcal{L}, \text{Hom}_{\mathcal{V}}(-, -)) \rightsquigarrow (\mathcal{L}, F(\text{Hom}_{\mathcal{V}'}(-, -)))$

$\text{Hom}_{\mathcal{V}'}(-, -)$

Ex. $(\text{Corr}(\mathcal{L}, \mathcal{E}), \otimes = \text{produit } \mathbb{A})$.

$\forall X \in \mathcal{L}$ est dualisable, de dual $X^V = X = e = \begin{pmatrix} X \\ \downarrow \Delta \\ X \otimes X \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} X \\ \downarrow \Delta \\ X \otimes X \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow (\text{Corr}(\mathcal{L}, \mathcal{E}), \text{Hom}(X_1, X_2) = X_1^V \otimes X_2 = X_1 \times X_2)$ ω -cat enrichie en $\text{Corr}(\mathcal{L}, \mathcal{E})$

$\overset{D(-)}{\rightsquigarrow} (\text{Corr}(\mathcal{L}, \mathcal{E}), \text{Hom}(X_1, X_2) = \mathcal{D}(X_1 \times X_2))$ ω -cat enrichie en $\text{Cat}_{\mathcal{L}}$.

Def $\mathcal{L}\mathbb{Z}^{(\omega, 2)} = \text{catégorie des correspondances } \mathcal{D}\text{-cohérentes}$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{L\mathbb{Z}_D^{(\infty, 2)}}(*, -) = L\mathbb{Z}_D^{(\infty, 2)} & \longrightarrow & \text{Cat}_{\infty}^{(\infty, 2)} \\
 X & \longrightarrow & D(X) \\
 D(X_1 \times X_2) & \xrightarrow{FM} & \text{Fun}(D(X_1), D(X_2)) \\
 \downarrow & & \text{" composition par } -*K \\
 K & \longrightarrow & D(X_1 \times X_2) \longrightarrow D(X_1 \times X_2) \\
 & & K_1 \longmapsto K_1 * K = FM_K(K_1)
 \end{array}$$

Composition ici $\cong D((X_1 \times X_2, X_2 \times X_3) \xrightarrow{X_1 \times X_2 \times X_3} X_1 \times X_3) = - * -$

$$\begin{array}{ccc}
 h_2(-) & & \\
 \downarrow & & \\
 2\text{-catégorie homotopique} & & L\mathbb{Z}_D^2 \longrightarrow \text{Cat}_{\infty}^2 \\
 \text{non-jointe} & &
 \end{array}$$

§3. Preuve du théorème :

Récrivons (Adj₁) & (Adj₂) comme :

$$(\text{Adj}_1) \quad 1_x \cong p_1: \Delta! 1_x \xrightarrow{p_1! d_\Delta} p_1! p_2^* L \cong f^* f! L \xrightarrow{f^* \text{trg}} f^* 1_y \cong 1_x$$

$$\begin{array}{l}
 \hookrightarrow 1_x \cong \Delta! 1_x * 1_x \xrightarrow{d_\Delta * 1_x} p_2^* L * 1_x \xrightarrow{1_x * f! L} 1_x * 1_y \cong 1_x \\
 \text{||} \qquad \qquad \qquad \text{||} \\
 (\vec{1}_x * \overleftarrow{L}) * \vec{1}_x \cong \vec{1}_x * (\overleftarrow{L} * \vec{1}_x) \\
 \text{assoc}
 \end{array}$$

$$(\text{Adj}_2) \quad L \cong p_2: (p_1^* L \otimes \Delta! 1_x) \rightarrow p_2: (p_1^* p_2^* L) \cong f^*(f! L) \otimes L \rightarrow f^* 1_y \otimes L = L$$

$$\begin{array}{l}
 \hookrightarrow L \cong L * \Delta! 1_x \xrightarrow{L * d_\Delta} L * p_2^* L \xrightarrow{f! L * L} 1_x * L = L \\
 \text{||} \qquad \qquad \qquad \text{||} \\
 \overleftarrow{L} * (\vec{1}_x * \overleftarrow{L}) \cong (\overleftarrow{L} * \vec{1}_x) * \overleftarrow{L} \\
 \text{assoc}
 \end{array}$$

Ils expriment une adjonction entre $1_x \in D(Y \times_Y X) + L \in D(X \times_Y Y)$ dans $L\mathbb{Z}_D$

$$\text{via. } (d_\Delta: \Delta! 1_x \rightarrow p_2^* L, \text{trg}: f! L \rightarrow 1_y) \\
 \text{||} \qquad \qquad \qquad \text{||} \\
 \text{id}_x \longmapsto \vec{1}_x * \overleftarrow{L} \qquad \qquad \overleftarrow{L} * \vec{1}_x \longmapsto \text{id}_y$$

Donc. $(Adj_1) + (Adj_2) \Rightarrow (\vec{1}_x, \vec{L}, cl_\Delta, trg)$ est une 2-adjonction dans $L \mathcal{E} \mathcal{D}$

FM $\Rightarrow (f: f^* \otimes L, \alpha, \beta)$ est une 2-adjonction dans $Cat_{\mathcal{D}}$.

FM $\vec{1}_x$	=	$f!$
FM \vec{L}	=	$f^* \otimes L$
FM cl_Δ	=	α
FM trg	=	β

Prop. la counité $\beta: f!(f^* \otimes L) \rightarrow id$
 \Downarrow
 FM $trg: - \otimes f!L \rightarrow - \otimes id$
 évalué en $1_y \Rightarrow \begin{cases} L \xrightarrow{\cong} f!1_y \\ f:L \rightarrow 1_y \text{ est la counité.} \\ f \circ f!1_y \end{cases}$

par adjonction.
 \Rightarrow la projection est $f^* \otimes L \xrightarrow{\cong} f! = f^* \otimes L$, isomorphisme.

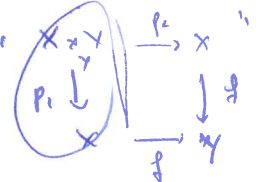
De plus, (Adj_1) & (Adj_2) passent au changement de base de façon naturelle $(L', cl_{\Delta'}, trg') = (g^*L, g^*cl_\Delta, g^*trg)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'! \rightarrow f''! = f'^* \otimes f'!1_{y'} \\ g'^* \underbrace{f'!1_y}_{L} \xrightarrow{\cong} \underbrace{f''!1_{y'}}_{g'^*L} \end{cases}$$

Réciproquement (supposons que f D-coh. base). Rétablissons (L, cl_Δ, trg) certain \rightarrow (Adj_1) & (Adj_2) pour

$L := f'!1_y$

$cl_\Delta: \Delta: 1_x \rightarrow P_1!1_x \cong P_1!f^*1_y \xleftarrow{\cong} P_2^*f'!1_y$ (cöch)
 (Corresp. à $P_1: \Delta: 1_x \cong 1_x$)



$trg: f:L = f:f'!1_y \rightarrow 1_y$ corresp. à $f: L = f'!1_y \xrightarrow{\cong} f'!1_y$.

Hyp. $f^* \otimes f'!1_y \xrightarrow{\cong} f!$, $f' \rightarrow f!$

\Rightarrow counité: $f! \circ f^* \xrightarrow{\cong} id = - \otimes 1_y$
 $f: f^* \otimes L \cong - \otimes f!L \xrightarrow{FM_{trg}} - \otimes 1_y = \beta$, soit $\alpha = \text{unité}$.

\exists unité $\alpha = \text{id} \rightarrow f^*(f! -) \circ L$

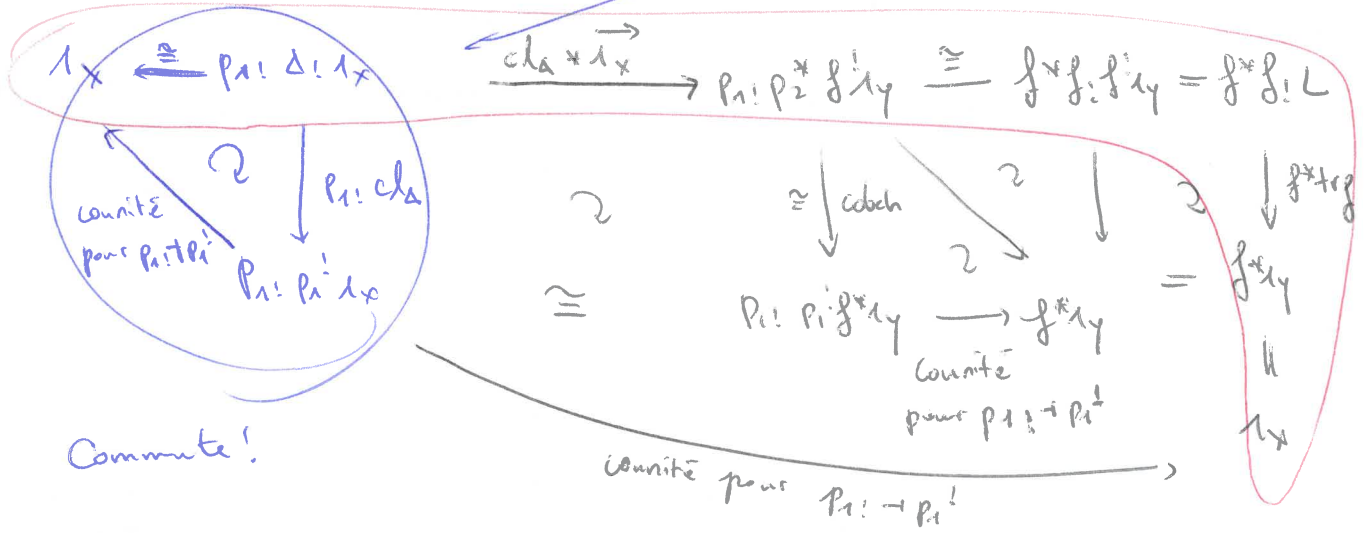
1^q. $(\text{Adj FM}_1^{\alpha, \beta}) \quad f! \xrightarrow{f! \circ \alpha} f! (f^* f! \circ L) \xrightarrow{\text{FM}_{trg} f!} f!$

$(\text{Adj FM}_2^{\alpha, \beta}) \quad f^* \circ L \xrightarrow{\alpha (f^* \circ L)} f^* (f! (f^* \circ L)) \circ L \xrightarrow{(f^* \circ L) \text{ FM}_{trg}} f^* \circ L$

sont des identités

sont des identités.

D'autre part → partons de la définition de ch_α



$\Rightarrow (\text{Adj}_1) \quad 1_x \cong P_1! D! 1_x \rightarrow P_1! P_2^* f! 1_y \dots \dots \dots 1_x$

$\Leftrightarrow 1_x \xrightarrow{ch_\alpha * 1_x} (1_x * \overline{L}) * 1_x \cong 1_x * (\overline{L} * 1_x) \xrightarrow{1_x * tg} 1_x$

est l'identité

$\Rightarrow (\text{Adj FM}_1) \quad f! \xrightarrow{\text{FM}_{ch_\alpha}} f! (f^* f! \circ L) \xrightarrow{\text{FM}_{trg} f!} f!$

$\Rightarrow \alpha = \text{FM}_{ch_\alpha}$

Abrs

$(\text{Adj FM}_2^{\alpha, \beta}) \Rightarrow f^* \circ L \xrightarrow{\text{FM}_{ch_\alpha} (f^* \circ L)} P_2^* (P_1^* f^* \circ L) \circ P_2^* L \cong f^* (- \circ f! L) \circ L \xrightarrow{(f^* \circ L) \text{ FM}_{trg}} f^* \circ L$

est l'identité,

$f^* (f! (f^* \circ L)) \circ L$

évalué en $1_y \Rightarrow L \rightarrow P_2! (P_1^* L \circ P_2^* L)$

$f^* (f! L) \circ L \xrightarrow{(f^* \circ L) \text{ trg}} L$

est l'identité,

$\cong f^* (f! L) \circ L \cong$

c'est (Adj 2)

Ex. $\mathcal{L} = \text{LChans} + \text{Applications continues}$

$\forall x \in \mathcal{L}, D(x) := D(x; \mathbb{Z}) = D(\text{Ab}(x)) \in \text{Cat}$

$I = \{ \text{immersions ouvertes} \} \rightsquigarrow i! \rightarrow i^* = i^!$

$P = \{ \text{appli propres} \} \rightsquigarrow p^* + p_* \cong p^*$

\rightsquigarrow formalisme des \mathcal{B} -foncteurs, même \mathcal{G} -foncteurs.

Prop. $X \xrightarrow{f} Y$ fibré en variétés topologiques lisses $\xrightarrow{f_{\text{cat}}} \mathcal{D}$ -ch.-lisse

Dém. $D(x)$ satisfait la descente pour les recouvrements ouverts de $X + \mathbb{Z} f^!$
 $\Rightarrow D$ -ch. lissité est locale.
 \Rightarrow on peut supposer $f = \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{proj.}} \mathbb{R}^m$. i immes.

Stabilité de D -ch. lissité \Rightarrow $f = \mathbb{R} \rightarrow *$ ou $f = * \rightarrow \mathbb{R}$
 par chg^t de base & composition

$L = \mathbb{Z}[\mathbb{1}] \in D(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$

Construisons $\left\{ \begin{array}{l} \alpha : \Delta : \mathbb{Z} \rightarrow P_2^* L = \mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2}[\mathbb{1}] \text{ dans } D(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z}). \\ \beta : f : \mathbb{Z}[\mathbb{1}] \rightarrow \mathbb{Z} \text{ dans } D(*; \mathbb{Z}) \cong D(\mathbb{Z}) \end{array} \right.$



tg. $\mathbb{Z} \cong P_1! \Delta : \mathbb{Z} \xrightarrow{P_1! \alpha} P_1! \mathbb{Z}[\mathbb{1}] \cong f^* f! \mathbb{Z}[\mathbb{1}] \xrightarrow{f^* \beta} f^* \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}[\mathbb{1}] \rightarrow P_2! (P_1^* \mathbb{Z}[\mathbb{1}] \otimes \Delta! \mathbb{Z}[\mathbb{1}]) \xrightarrow{P_2! (- \otimes \alpha)} P_2! (P_1^* \mathbb{Z} \otimes P_2^* \mathbb{Z}[\mathbb{1}]) \cong f^* f! \mathbb{Z}[\mathbb{1}] \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{1}] \xrightarrow{f^* \beta \otimes \text{id}} f^* \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{1}] \cong \mathbb{Z}[\mathbb{1}]$

soient des isomorphismes.

(puis les modifier en identités)

(Fixons une orientation sur \mathbb{R})

$\beta = f! \mathbb{Z}[\mathbb{1}] = R\Gamma_c(\mathbb{R}, \mathbb{Z})[\mathbb{1}] \cong \mathbb{Z}$

Il suffit que $P_1! \alpha$ & $P_2! \alpha$ soient des isomorphismes.

$\alpha : j! \mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta} \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \Delta_* \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}$

$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ diagonal, $j : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\text{RHom}(-, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2}[1])$$

$$\implies \text{RHom}(\mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2}, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2}) \rightarrow \text{RHom}(j: \mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \Delta, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2}) \rightarrow \text{RHom}(\Delta: \mathbb{Z}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2}[1])$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \cong & & \\ & & \text{RHom}(\mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2}, j^* \mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2}) & & \\ & \parallel & & \parallel & \\ \text{R}\Gamma(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{restriction}} & \text{R}\Gamma(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta, \mathbb{Z}) & \rightarrow & ? \\ & \parallel & & \parallel & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{diag}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{différence}} & \mathbb{Z} \\ & & (x, y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \text{générateur}}}$

α n'est pas lui-même un iso car $\text{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2}[1], \Delta: \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}) =$
 $= H^0(\text{R}\Gamma(\mathbb{R}^2, \Delta: \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}[1])) = 0$

Mais $p_1: \alpha = \mathbb{Z}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}$

$p_2: \alpha = \mathbb{Z}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}$

En effet, par exemple pour p_1 : on a :

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\text{diag}} & & \xrightarrow{\text{diff}} \\ & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \\ p_1 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & \xrightarrow{\text{diag}} & & \xrightarrow{\text{diff}} \\ & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\implies \text{RHom}(\Delta: \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}^2}[1]) \xrightarrow[p_1]{\cong} \text{RHom}(p_1 \Delta: \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}, p_1 \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}[1])$$

$$\cong \text{RHom}(\mathbb{Z}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}})$$

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \Rightarrow p_1: \alpha = \text{générateur}$
 qui est un isomorphisme.

□