Groupe de travail / Formalismes des 6-foncteurs, d'après Scholze 11/01/2024

Dualité de Poincaré

§0 Exemples classiques $\rightsquigarrow D(X_{(\text{ét})}, \mathbb{F}_\ell)$

0) (Poincaré ?) variétés topologiques lisses $\Longrightarrow H^{d-i}_c(X;\mathbb{R})^\vee \cong H^i(X;\mathbb{R})$

1) (Artin, Deligne, Grothendieck, Verdier)

X schéma (propre) lisse $/k=\bar{k}$, $\dim = d$. $\ell \neq \mathrm{char}(k)$

$\Longrightarrow H^{2d-i}_{\text{ét},c}(X,\mathbb{F}_\ell)^\vee \cong H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{F}_\ell(d))$

2) (Berkovich, Huber)

X espace rigide analytique propre et lisse $/C=\hat{\bar{C}}$, $\dim = d$. $\ell \neq \mathrm{char}(k)$

2') (Gabber - Zavyalov, Mann) ———————— $\ell = p = \mathrm{char}(k)$

En termes de la dualité de Verdier : $f: X \longrightarrow * = \mathrm{Spec}(k)$ ou $\mathrm{Spa}(C, \mathcal{O}_C)$

f (propre et) lisse de $\dim = d \Longrightarrow f_! \dashv f^! \cong f^* \otimes \mathbb{F}_\ell(d)[2d]$

Exemples de diamants à la Scholze $\rightsquigarrow D_{\text{ét}}(X, \mathbb{F}_\ell)$ $\ell \neq p$.

But. Définir une lissité pour des petits v-champs - faisceaux $/\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ recevant une surjection d'un espace perfectoïde.

Problème. Pas de critère (de relèvement) infinitésimal, car $\Omega^1_{X/Y} = 0$ X/Y dans $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$.

Solution/Déf. f est ℓ-cohomologiquement lisse

si $\begin{cases} f \text{ compactifiable} \\ \dim \underbrace{\mathrm{trdeg}\, f}_{} < \infty \end{cases}$ deg. transcendance. topologique

"$Rf^! \cong f^* \otimes L$ universellement sur la base".

Ex. • $\mathbb{B}^{d,1/p^\infty}_S \longrightarrow S$, $\forall S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$

• $[X/K] \to Y$ avec $X \to Y$ coh. lisse. $(X \longrightarrow [X/K]$ pas coh. lisse)

$\circlearrowright K$ action libre d'un pro-p groupe

• $[*/\underline{GL_n(\mathbb{Q}_p)}] \to *$

Ceci conduit à une formulation uniforme de la dualité de Poincaré :

(Pour certain formalisme des 6 foncteurs) "$\underline{\text{lisse} \Rightarrow \mathcal{D}\text{-coh. lisse}}$".

Question : 1) Notion de "D-coh. lisse" pour des 6FF abstraits plus généraux.

2) Preuve uniforme de diverses dualités de Poincaré = chercher des conditions minimales sur D qui font que "lisse ⇒ D-coh lisse" et les vérifier cas par cas.

Aujourd'hui 1) + 2) conditions minimales.

§1 Définitions & Énoncé de la dualité de Poincaré abstraite.

Formalisme des 3-foncteurs ; i.e. foncteur lax. sym. monoïdal

$$\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty$$

$\mathcal{C}$: ∞-cat avec produits finis

E : classe de morphismes { stables par pullback & composition ; contenant les iso.

Déf. Un morphisme $f \overset{\in E}{:} X \to Y$ est $\underline{\mathcal{D}\text{-coh lisse}}$

si (i) $f_! \dashv \exists f^!$ et $f^* \otimes f^! 1_Y \xrightarrow{\text{coproj}} f^!$ est $\cong$

(ii) $f^! 1_Y$ est $\otimes$-inversible dans $\mathcal{D}(X)$

(iii) $\forall$ carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

(i), (ii) restent valables

et $g'^* f^! 1_Y \xrightarrow{\text{cobch}} f'^! g^* 1_Y = f'^! 1_{Y'}$ est $\cong$.

Rmq. 1). Si $f_! \dashv f^!$, alors $f_!(f^* \otimes f^! 1_Y) \cong \cancel{f_!}\, - \otimes f_! f^! 1_Y \xrightarrow{-\otimes \text{counité}} - \otimes 1_Y \cong -$

$\rightsquigarrow f^* \otimes f^! 1_Y \to f^!$ "$\underline{\text{Coprojection}}$".

2) Si $f_! \dashv f^!$, $f'_! \dashv f'^!$, alors $f'_! g'^* f^! \simeq g^* f_! f^! \xrightarrow{g^*(\text{counité})} g^*$

$\rightsquigarrow g'^* f^! \longrightarrow f'^! g^*$ "cochangement de base"

3) f D-coh. lisse $\Rightarrow$ $g'^* f^! \xrightarrow{\text{cobch}} f'^! g^*$ est $\simeq$.

En effet :

$$\begin{tikzcd}
g'^* f^! \arrow[rrd, dashed] & g'^*(f^* \otimes f^! 1_Y) \arrow[l, "\text{coproj}", "\simeq"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & g'^* f^* \otimes g'^* f^! 1_Y \arrow[d, "\simeq\ \text{cobch}"] \\
 & & f'^* g^* \otimes f'^! g^* 1_Y \arrow[d, equal] \\
 & f'^! g^* & f'^* g^* \otimes f'^! 1_{Y'} \arrow[l, "\text{coproj}", "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

vérifions que ceci correspond par $f'_! \dashv f'^!$ à :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
g^* f_! f^! \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & g^* f_!(f^* \otimes f^! 1_Y) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \arrow[rrrd, "\simeq"] & & & \\
f'_! g'^* f^! \arrow[ddr, dashed] & f'_! g'^*(f^* \otimes f^! 1_Y) \arrow[l, "\text{coproj}", "\simeq"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & f'_!(g'^* f^* \otimes g'^* f^! 1_Y) \arrow[d, "\simeq\ \text{cobch}"] \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & g^* \otimes f'_! g'^* f^! 1_Y \arrow[d, "\simeq\ \text{cobch}"] \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & g^* \otimes g^* f_! f^! 1_Y \arrow[d, "\text{counit}"] \\
f'_! f'^! g^* \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & & f'_!(f'^* g^* \otimes f'^! 1_{Y'}) \arrow[ll, "\text{coproj}", "\simeq"'] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & g^* \otimes f'_! f'^! 1_{Y'} \arrow[r, "\text{counit}"] \arrow[dl, equal] & g^* \otimes 1_Y \\
g^* & & g^* \otimes f'_! f'^! 1_{Y'} \arrow[ll] & &
\end{tikzcd}$$

c'est identifié ainsi par commutativité à $f'_! g'^* f^! \simeq g^* f_! f^! \xrightarrow{\text{counit}} g^*$.

4) D-coh. lissité est stable par composition & changement de base

• commutativité sont encodée dans $\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)$ & lax sym. monoïdalité de D.

• $f^* = D(Y \xleftarrow{f} X = X)$ est symétrique monoïdal :

$$D\big((Y,Y) \xleftarrow{\Delta} X = X\big) = D\big((Y,Y) \xleftarrow{\Delta} Y = Y \xleftarrow{f} X = X\big) = f^*(- \otimes -)$$

$$= D\big((Y,Y) \xleftarrow{(f,f)} (X,X) = (X,X) \xleftarrow{\Delta} X = X\big) = (f^* -) \otimes (f^* -)$$

Thm. $f \in E : X \to Y$ est D-coh. lisse

$\iff \exists$ <u>théorie de cycle-trace</u> (L, cl_Δ, tr_f) sur f.

C'est ~~un~~ un triple : $L \in D(X)$. $\otimes$-inversible

$$\begin{tikzcd} & X\times_Y X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

$cl_\Delta : \Delta_! 1_X \to p_2^* L$ dans $D(X\times_Y X)$ "application de cycles"

$tr_f : f_! L \to 1_Y$ dans $D(Y)$ "trace"

tq.

(Adj 1) $1_X \cong p_{1!}\Delta_! 1_X \xrightarrow{p_{1!} cl_\Delta} p_{1!} p_2^* L \cong f^* f_! L \xrightarrow{f^* tr_f} f^* 1_Y \cong 1_X$

(Adj 2) $L \cong p_{2!}(p_1^* L \otimes \Delta_! 1_X) \xrightarrow{p_{2!}(p_1^* L \otimes cl_\Delta)} p_{2!}(p_1^* L \otimes p_2^* L) \cong p_{2!}p_1^* L \otimes L \cong f^* f_! L \otimes L \xrightarrow{(f^* \otimes L) tr_f} f^* 1_Y \otimes L \cong L$

sont homotopique à l'identité (id_{1_X} / id_L)

ou exactement l'identité dans $h_1 D(X)$.

Rmq. Dans ce cas, $tr_f : f_! L \to 1_Y$ correspond à $L \xrightarrow{\cong} f^! 1_Y$.

Rmq. (Adj 1) & (Adj 2) passent au changement de base quelconque

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd} \rightsquigarrow (L', cl_{\Delta'}, tr_{f'})$$

$L' = g'^* L$, $cl_{\Delta'} = g'^* cl_\Delta$, $tr_{f'} = g^* tr_f$.

g^*(Adj 1) & g^*(Adj 2) sont identifiés à (Adj' 1) & (Adj' 2) par changement de base + formule de projection

e.g. $1_{X'} \cong p'_{1!}\Delta'_! 1_{X'} \xrightarrow{p'_{1!} cl_{\Delta'}} p'_{1!} p_2'^* g'^* L \cong f'^* f'_! g'^* L \xrightarrow{f'^* tr_{f'}} f'^* 1_{Y'} \cong 1_{X'}$

$\wr\wr$

$g^*\left(1_X \cong p_{1!}\Delta_! 1_X \xrightarrow{p_{1!} cl_\Delta} p_{1!} p_2^* L \cong f^* f_! L \xrightarrow{f^* tr_f} f^* 1_Y \cong 1_X\right)$

Rmq. On peut supprimer des deux côtés la <u>$\otimes$-inversibilité</u> (voir la preuve).

Adjonctions :

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ ∞-catégorie : $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$, foncteurs anti-parallèles.

$\underset{\text{(Lurie)}}{F \dashv G} \underset{\text{Lurie}}{\iff} \exists\, \varepsilon : \mathrm{id} \to G\circ F$ transf. naturelle

tq. $\forall c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}$,

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(c), G(d)) \arrow[dr] & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d)) \end{tikzcd}$$

est une équivalence ~~de~~ d'∞-groupoïdes.

$\underset{\text{Riehl-Verity}}{\iff} \exists\, \varepsilon : \mathrm{id} \to GF$, $\eta : FG \to \mathrm{id}$ transf. naturelles

tq.
$$\begin{tikzcd} & FGF \arrow[dr, "\eta F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\ F \arrow[ur, "F\varepsilon"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_F"'] & {} & F \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} & GFG \arrow[dr, "G\eta"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\ G \arrow[ur, "\varepsilon G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_G"'] & {} & G \end{tikzcd}$$

où $\Downarrow$ est un 3-morphisme dans $\mathrm{Cat}_\infty^{(\infty,2)}$
- ob. – $\mathcal{C}$ ∞-cat
- $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ∞-cat.

$\iff \exists\, \varepsilon : \mathrm{id} \to GF$, $\eta : FG \to \mathrm{id}$ transf. nat

tq.
$$\begin{tikzcd} & FGF \arrow[dr, "\eta F"] \arrow[d, phantom, "\simeq"] & \\ F \arrow[ur, "F\varepsilon"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_F"'] & {} & F \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} & GFG \arrow[dr, "G\eta"] \arrow[d, phantom, "\simeq"] & \\ G \arrow[ur, "\varepsilon G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_G"'] & {} & G \end{tikzcd}$$

dans Cat^2_∞
- ob. – $\mathcal{C}$ ∞-cat
- $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$
- composition.

Def. une 2-catégorie = catégorie $\mathcal{C}$ faiblement enrichie en Cat_1 "bicatégorie"

i.e.
- $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
- $\mathrm{Hom}(c_1, c_2)$ est une Catégorie
- Composition + d'associativité, Pentagone

Def. (Joyal) $\mathcal{C}$ 2-catégorie, $c_1 \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} c_2$

$F \dashv G$ est une 2-adjonction si $\exists\, \varepsilon : \mathrm{id} \to GF$, $\eta : FG \to \mathrm{id}$ 2-morphismes

tq.
$$\begin{tikzcd} & FGF \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\simeq"] & \\ F \arrow[ur] \arrow[rr] & {} & F \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} & GFG \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\simeq"] & \\ G \arrow[ur] \arrow[rr] & {} & G \end{tikzcd}$$
Commutent.

Ex. $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Cat}^2_\infty$. $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$

$\underset{\text{(Lurie)}}{F \dashv G} \iff \underset{\text{(Joyal)}}{F \dashv G}$

Lem. Les 2-foncteurs (i.e. pseudo-foncteur, qui préserve les identités & les compositions à ~~des~~ isomorphisme près, de façon cohérente) préservent les 2-adjonctions dans des 2-catégories.

Rmq. (i). (G,α,β) est unique à un iso (de triples) près.

(ii)
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\alpha'"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_F"'] & FGF \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, "\beta F"] & F \end{tikzcd} \quad \& \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\alpha'' G"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_G"'] & GFG \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, "G\beta"] & G \end{tikzcd} \implies \alpha' = \alpha''$$

(iii)
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\alpha'"] \arrow[rr, bend right, "\text{un iso}"'] & FGF \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, "\beta F"] & F \end{tikzcd} \quad \& \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\alpha'' G"] \arrow[rr, bend right, "\text{un iso}"'] & GFG \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, "G\beta"] & G \end{tikzcd}$$
$\implies$ peut modifier α' et α'' tq. $F \dashv G$ via (α, β)

<u>Sur l'isomorphisme</u> $L \cong p_{2!}(p_1^* L \otimes \Delta_! 1_X)$. $\forall L \in D(X)$:

$$p_{2!}(p_1^* L \otimes \Delta_! 1_X) \underset{\text{pour } \Delta}{\overset{\text{proj}}{\cong}} \underbrace{p_{2!}(\Delta_!}_{\mathrm{id}_!}(\underbrace{\Delta^* p_1^*}_{\mathrm{id}^*} L \otimes 1_X)) \cong L$$

$\implies p_{2!}(p_1^* - \otimes \Delta_! 1_X) \cong \mathrm{id}_{D(X)}$ équivalence naturelle.

§2. <u>Transformée de Fourier-Mukai</u>, <u>la catégorie de $\mathcal{Z}_D$</u> (Lu-Zheng, Fargues-Scholze)

Déf.
$$\begin{tikzcd} & X_1 \times_Y X_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X_1 \arrow[dr, "\in E"'] & & X_2 \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow \forall K \in D(X_1 \times_Y X_2)$ "noyau" sa transformée de FM est le foncteur
$$FM_K := p_{2!}(p_1^* - \otimes K) : D(X_1) \longrightarrow D(X_2)$$

Ex. (i).
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "f \in E"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$
$\forall K \in D(X) \rightsquigarrow FM_{\overrightarrow{K}} = f_!(- \otimes K)$

(ii)
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, equal] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$
$\forall K \in D(X) \rightsquigarrow FM_{\overleftarrow{K}} = (f^* -) \otimes K$

(iii)
$$\begin{tikzcd} & X \times_Y X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$
$\forall K \in D(X \times_Y X) \rightsquigarrow FM_K = p_{2!}(p_1^* - \otimes K)$

En particulier, $X \xrightarrow{\Delta} X \times_Y X \rightsquigarrow FM_{\Delta_! 1_X} \cong \mathrm{id}_{D(X)}$

(iv)
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & \\ Y & & Y \end{tikzcd}$$
$\forall K \in D(Y) \rightsquigarrow FM_K = - \otimes K$

Ainsi f est $\mathcal{D}$-coh. lisse $\iff \begin{cases} FM_{1_X} \to \exists f^! \text{ et } FM_{f^! 1_Y} \xleftarrow{} \xrightarrow[\cong]{\text{coproj}} f^! \\ f^! 1_Y \in \mathcal{D}(X)^{\otimes\text{-inv}} \end{cases}$

+ changement de base

Ex. Si f est $\mathcal{D}$-coh. lisse, via coproj. isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} f_! f^! \arrow[r, "\text{counité}"] & - \\ f_!(f^* - \otimes f^! 1_Y) \arrow[u, "\cong\ \text{coproj}"] \arrow[ur] & \\ - \otimes f_! f^! 1_Y \arrow[u, phantom, "\wr"] \arrow[r] & - \otimes 1_Y \arrow[uu, "\cong"'] \\ FM_{f_! f^! 1_Y} \arrow[u, equal] \arrow[r] & FM_{1_Y} \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

c'est alors identifié à $FM_{f_! f^! 1_Y} \to FM_{1_Y}$ induit par la counité $f_! f^! 1_Y \to 1_Y$.

Pour la preuve du théorème (supposons désormais $Y = *$ (l'objet final de $\mathcal{C}$))

1) construire une 2-catégorie $LZ_{\mathcal{D}}$: objet $= Ob\,\mathcal{C}$; $Hom(X_1, X_2) = \mathcal{D}(X_1 \times X_2)$ — 1-cat

2) construire un 2-foncteur : $LZ_{\mathcal{D}} \longrightarrow Cat^2_\infty$

$$X \longmapsto \mathcal{D}(X)$$

$$\mathcal{D}(X_1 \times X_2) \longrightarrow Fun(\mathcal{D}(X_1), \mathcal{D}(X_2))$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & FM_K \arrow[d] \\ K' \arrow[r, mapsto] & FM_{K'} \end{tikzcd}$$

Ce qui manque : $Comp : - * -$ $\longmapsto$ composition de foncteurs

3) Faire un lien entre certaines 2-adjonctions dans $LZ_{\mathcal{D}}$ & d'autres dans Cat^2_∞.

Lem/Déf.

$$\begin{tikzcd} & & X_1 \times X_2 \times X_3 \arrow[dl, "\pi_{12}"'] \arrow[dr, "\pi_{23}"] \arrow[rr] & & X_1 \times X_3 \arrow[d] \\ & X_1 \times X_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_2 \times X_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \, \\ X_1 & & X_2 & & X_3 \end{tikzcd}$$

$\forall K_{12} \in \mathcal{D}(X_1 \times X_2)$

$\forall K_{23} \in \mathcal{D}(X_2 \times X_3)$

$$\mathcal{D}(X_1) \xrightarrow{FM_{K_{12}}} \mathcal{D}(X_2) \xrightarrow{FM_{K_{23}}} \mathcal{D}(X_3)$$

$\Longrightarrow FM_{K_{23}} \circ FM_{K_{12}} \cong FM_{K_{13}}$ avec $K_{13} = \pi_{13!}(\pi_{12}^* K_{12} \otimes \pi_{23}^* K_{23}) = K_{12} * K_{23}$ "Convolution"

Dém. • changement de base (×1) + formule de projection (×2) + associativité de composition (×4)

• Alternativement il y a une preuve schématique / par dessin de correspondances

$$- * - = D\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_1\times X_2\times X_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (X_1\times X_2,\ X_2\times X_3) & & X_1\times X_3\end{tikzcd}\right)$$

$$\boxed{X_{ijk} = X_i\times X_j\times X_k}$$

$$= D\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_{123} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (X_{12},\ X_{23}) & & X_{13}\end{tikzcd}\right)$$

$$FM_{K_{12}} = D\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_{12} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (X_1,\ X_{12}) & & X_2\end{tikzcd}\right)\Bigg|_{X_1\times\{K_{12}\}}$$

$$D(X_1)\times\{K_{12}\} \longrightarrow D(X_2)$$

$$FM_{K_{23}}\circ FM_{K_{12}} = D\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & & X_{123} \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & & \\ & (X_{12},\ X_{23}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_{23} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (X_1,\ X_{12},\ X_{23}) & & (X_2,\ X_{23}) & & X_3\end{tikzcd}\right)\Bigg|_{X_1\times\{K_{12}\}\times\{K_{23}\}}$$

$$= D\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & & X_{123} \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & & \\ & (X_1,\ X_{123}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_{13} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (X_1,\ X_{12},\ X_{23}) & & (X_1,\ X_{13}) & & X_3\end{tikzcd}\right)\Bigg|_{X_1\times\{K_{12}\}\times\{K_{23}\}}$$

$$= FM_{K_{12} * K_{23}}$$

□

La preuve utilise des 2-simplexes dans $\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)$.
En jouant avec des 3-simplexes, on obtient :

Lem. $\exists$ transf. nat $(- * -) * - \cong - * (- * -)$

$$\begin{tikzcd} (- * -) * - \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\wr"] & - * (- * -) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ & D\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_{1234} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (X_{12},\ X_{23},\ X_{34}) & & X_{14}\end{tikzcd}\right)\end{tikzcd}$$

tq. le pentagone d'associativité commute dans Cat^2_∞.
(ou à une homotopie près dans $\mathrm{Cat}_\infty^{(\infty,2)}$)

<u>Dém</u>. Utiliser des 3-simplexes.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \underset{((-*-),-,-)}{(13,34.45)} \arrow[r] & \underset{((-*-)*-,-)}{(14.45)} \arrow[dr, "((-*-)*-)*-"] & \\
\underset{(-,-,-,-)}{(12.23,34,45)} \arrow[ur] \arrow[urr, dashed] \arrow[rrr, dashed] \arrow[dr] & & & (15) \\
 & \underset{(-,-*-,-)}{(12,24.45)} \arrow[uur, "(-*(-*-),-)"'] \arrow[urr, dashed, "(-*(-*-))*-"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

<u>Ainsi</u>.

<u>Déf</u>. (Lu-Zheng, Fargues-Scholze (Zavyalov?)) $D : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty$ ($Y = *$) 3 foncteurs

La ~~2-catégorie des correspondances D-cohomologiques~~

est LZ_D : $\mathrm{ob} = \mathrm{ob}\, \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) = \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$

$\mathrm{Hom}_{LZ_D}(X_1, X_2) = D(X_1 \times X_2)$ — 1-cat.

composition $= - * -$.

c'est bien défini par le lemme précédent.

$\rightsquigarrow$ 2-foncteurs : $LZ_D \longrightarrow \mathrm{Cat}^2_\infty$

$$\begin{aligned}
X &\longmapsto D(X) \\
D(X_1 \times X_2) &\longmapsto \mathrm{Fun}(D(X_1), D(X_2)) \\
\rotatebox{90}{$\in$}\ \ & \qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$} \\
K &\longmapsto FM_K \\
- * - &\longmapsto \text{composition de foncteurs.}
\end{aligned}$$

<u>une construction ∞-catégorique (à la Zavyalov)</u>

<u>Déf</u>. $\mathcal{C}$ ∞-cat (sym) monoïdale est <u>fermé (close</u> (à gauche) si $\forall X$, $X \otimes - \dashv \exists F(X, -)$

$\rightsquigarrow F(X_1, X_2) \otimes F(X_2, X_3) \longrightarrow F(X_1, X_3)$

(qui correspond à $X_1 \otimes F(X_1, X_2) \otimes F(X_2, X_3) \longrightarrow X_2 \otimes F(X_2, X_3) \longrightarrow X_3$)

+ propriété de cohérence supérieure (associativité)

$\llcorner$ proprement définie via redressement (straightening - unstraightening)

Thm (Gepner - Haugseng, ~~Cor 7.4~~ 4. Enriched ∞-cat via non-sym ∞-operads, Cor 7.4.9)

$\mathcal{C}$ ∞-cat. (sym) mon. fermée

$\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$ enrichie en elle-même, i.e. $\left(\mathcal{C}, \underline{\mathrm{Hom}}(-,-)\right)$ forme une catégorie supérieure

$$\underline{\mathrm{Hom}}(-,-) = F(-,-) \in \mathcal{C}$$

(cohérence supérieure : associativité)

Un exemple est donné par une ∞-cat (sym) ~~rigide~~ monoïdale rigide

Def. $\mathcal{C}$ ∞-cat (sym) monoïdal, est rigide si $\forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ est dualisable (à gauche)

i.e. $\exists X^\vee \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\exists\, e : X \otimes X^\vee \to 1$ "évaluation"

$c : 1 \to X^\vee \otimes X$ "coévaluation"

tq.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X \otimes X^\vee \otimes X \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\ X \arrow[ur, "id \otimes c"] \arrow[rr, "id"'] & {} & X \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & X^\vee \otimes X \otimes X^\vee \arrow[dr, "X^\vee \otimes e"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\ X^\vee \arrow[ur, "c \otimes X^\vee"] \arrow[rr, "id"'] & {} & X^\vee \end{tikzcd}$$

Lem. $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ dualisable (à gauche) de dual $X^\vee$. $\Longrightarrow X \otimes - \dashv X^\vee \otimes -$

via $\mathrm{Hom}(X \otimes A, B) \cong \mathrm{Hom}(A, X^\vee \otimes B)$

$$(X \otimes A \xrightarrow{f} B) \rightsquigarrow (A \xrightarrow{c \otimes A} X^\vee \otimes X \otimes A \xrightarrow{X^\vee \otimes f} X^\vee \otimes B)$$

$$(X \otimes A \xrightarrow{X \otimes g} X \otimes X^\vee \otimes B \xrightarrow{e \otimes B} B) \longleftarrow (A \xrightarrow{g} X^\vee \otimes B)$$

D'autres exemples se produit par foncteur $\mathcal{V} \xrightarrow{F} \mathcal{V}'$ foncteur lax (sym). monoïdal

∞-cat (sym) monoïdales

$\mathcal{C}$ enrichie en $\mathcal{V}$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}$ enrichie en $\mathcal{V}'$

$$\left(\mathcal{C}, \mathrm{Hom}^{\mathcal{V}}(-,-)\right) \rightsquigarrow \left(\mathcal{C}, F(\mathrm{Hom}^{\mathcal{V}}(-,-))\right)$$

$$F(\mathrm{Hom}^{\mathcal{V}}(-,-)) = \mathrm{Hom}^{\mathcal{V}'}(-,-)$$

Ex. $(\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E), \otimes = \text{produit } \boxtimes)$.

$\forall X \in \mathcal{C}$ est dualisable, de dual $X^\vee = X$: $e = \left(X \times X \xleftarrow{\Delta} X \rightarrow *\right)$, $c = \left(* \leftarrow X \xrightarrow{\Delta} X \times X\right)$

$\rightsquigarrow \left(\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E), \underline{\mathrm{Hom}}(X_1, X_2) = X_1^\vee \otimes X_2 = X_1 \times X_2\right)$ ∞-cat enrichie en $\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E)$

$\overset{D(-)}{\rightsquigarrow} \left(\mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E), D(\underline{\mathrm{Hom}}(X_1, X_2)) = D(X_1 \times X_2)\right)$ ∞-cat enrichie en Cat_∞.

Def $LZ_D^{(\infty,2)} :=$ $(\infty,2)$-catégorie des correspondances D-cohomologiques.

$$\mathrm{Hom}_{LZ_D^{(\infty,2)}}(*,-) : LZ_D^{(\infty,2)} \longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty^{(\infty,2)}$$

$$X \longmapsto D(X)$$

$$D(X_1\times X_2) \xrightarrow{FM} \mathrm{Fun}\,(D(X_1), D(X_2))$$

$$\rotatebox{90}{$\in$}\ \qquad\qquad\qquad \| \quad \text{composition par } -* K$$

$$K \longmapsto \quad D(*\times X_1) \longrightarrow D(*\times X_2)$$

$$K_1 \longmapsto K_1 * K = FM_K(K_1)$$

composition ici $\simeq$ $D\big((X_1\times X_2, X_2\times X_3) \xleftarrow{} X_1\times X_2\times X_3 \to X_1\times X_3\big) = - * -$

$h_2(-)$

$$LZ_D^2 \longrightarrow \mathrm{Cat}_\infty^2 .$$

2-catégorie homotopique sous-jacente

§3. Preuve du théorème :

Réécrivons (Adj₁) & (Adj₂) comme.

$$(\mathrm{Adj}_1)\quad 1_X \cong p_{1!}\Delta_! 1_X \xrightarrow{p_{1!}cl_\Delta} p_{1!}\, p_2^* L \cong f^* f_! L \xrightarrow{f^* tr_f} f^* 1_Y = 1_X$$

$$\hookrightarrow \quad 1_X \cong \Delta_! 1_X * 1_X \xrightarrow{cl_\Delta * 1_X} p_2^* L * 1_X \qquad 1_X * f_! L \xrightarrow{1_X * tr_f} 1_X * 1_Y \cong 1_X$$

$$\overset{\parallel}{(\vec{1}_X * \overleftarrow{L}) * \vec{1}_X} \underset{\text{assoc}}{\cong} \overset{\parallel}{\vec{1}_X * (\overleftarrow{L} * \vec{1}_X)}$$

$$(\mathrm{Adj}_2)\quad L \cong p_{2!}(p_1^* L \otimes \Delta_! 1_X) \longrightarrow p_{2!}(p_1^* \otimes p_2^* L) \cong f^*(f_! L)\otimes L \longrightarrow f^* 1_Y \otimes L = L$$

$$\hookrightarrow \quad L \cong L * \Delta_! 1_X \xrightarrow{L * cl_\Delta} L * p_2^* L \qquad f_! L * L \xrightarrow{tr_f * L} 1_X * L = L$$

$$\overset{\parallel}{\overleftarrow{L} * (\vec{1}_X * \overleftarrow{L})} \underset{\text{assoc}}{\cong} \overset{\parallel}{(\overleftarrow{L} * \vec{1}_X) * \overleftarrow{L}}$$

Ils expriment une adjonction entre $1_X \in D(Y\times_Y X)$ + $L \in D(X\times_Y Y)$ dans LZ_D

via. $\big(cl_\Delta : \Delta_! 1_X \longrightarrow p_2^* L$ ~~[illegible]~~, $tr_f : f_! L \longrightarrow 1_Y\big)$

$$\overset{\parallel}{id_X} \longmapsto \overset{\parallel}{\vec{1}_X * \overleftarrow{L}} \qquad\qquad \overset{\parallel}{\overleftarrow{L} * \vec{1}_X} \longrightarrow \overset{\parallel}{id_Y}$$

Donc. (Adj 1) + (Adj 2) $\Rightarrow$ ($\overrightarrow{1_X}$, $\overleftarrow{L}$, cl_Δ , trg) est une 2-adjonction

dans LZ_D

$$\overset{FM}{\Longrightarrow} \ (f_! \ . \ \underbrace{f^* \otimes L}_{=f^!} , \alpha, \beta) \text{ est une 2-adjonction}$$

dans $Cat^{\otimes}_{\infty}$.

$FM_{\overrightarrow{1_X}} = f_!$

$FM_{\overleftarrow{L}} = f^* \otimes L$

$FM_{cl_\Delta} = \alpha$

$FM_{trg} = \beta$

Rmq. La counité $\beta : f_!(f^* \otimes L) \longrightarrow id$

$$FM_{trg} : \quad - \otimes f_! L \longrightarrow - \otimes 1_Y$$

Évalué en 1_Y $\Rightarrow \begin{cases} L \overset{\simeq}{\longrightarrow} f^! 1_Y \\ f_! L \longrightarrow 1_Y \text{ est la counité.} \end{cases}$

$$f_! L = f_! f^! 1_Y$$

par adjonction.

$\Rightarrow$ ~~la~~ coprojection est $f^* \otimes L \overset{\simeq}{\longrightarrow} f^! = f^* \otimes L$, isomorphisme.

De plus, (Adj 1) & (Adj 2) passent au changement de base de façon naturelle $(L', cl_{\Delta'}, trg_\cdot) = (g^* L, g^* cl_\Delta, g^* trg)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f'_! \dashv f'^! = f'^* \otimes f'^! 1_{Y'} \\ \underbrace{g'^* f^! 1_Y}_{=L} \overset{\simeq}{\longrightarrow} \underbrace{f'^! 1_{Y'}}_{=g'^* L} \end{cases}$$

Réciproquement (supposons que f D-coh. lisse). Établissons (Adj 1) & (Adj 2) pour certain (L, cl_Δ, trg)

$L := f^! 1_Y$

$cl_\Delta : \Delta_! 1_X \to p_1^! 1_X \simeq p_1^! f^* 1_Y \overset{\simeq}{\underset{\text{cobch}}{\longleftarrow}} p_2^* f^! 1_Y$ "lissité pour

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{p_2} & X \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

"

(Corresp. à $p_{1!} \Delta_! 1_X \simeq 1_X$)

$trg : f_! L = f_! f^! 1_Y \longrightarrow 1_Y$ corresp. à $L = f^! 1_Y \overset{\simeq}{\longrightarrow} f^! 1_Y$.

Hyp. $f^* \otimes f^! 1_Y \underset{\text{coproj.}}{\overset{\simeq}{\longrightarrow}} f^!$, $f_! \dashv f^!$

$\Rightarrow$ counité : $f_! f^! \xrightarrow{\text{counit}} id = - \otimes 1_Y$, soit α = unité.

$$f_!(f^* \otimes L) \simeq - \otimes f_! L \qquad FM_{trg} = \beta.$$

$\exists$ unité $\alpha : \mathrm{id} \longrightarrow f^*(f_! -) \otimes L$

tq. $(\mathrm{Adj}\,FM_1^{\alpha,\beta})$ $\quad f_! \xrightarrow{f_!\alpha} f_!(f^* f_! \otimes L) \xrightarrow{FM_{trg}\, f_!} f_!$

$(\mathrm{Adj}\,FM_2^{\alpha,\beta})$ $\quad f^*\otimes L \xrightarrow{\alpha(f^*\otimes L)} f^*(f_!(f^*\otimes L))\otimes L \xrightarrow{(f^*\otimes L)\,FM_{trg}} f^*\otimes L$ ~~sont des identités~~

sont des identités.

D'autre part, partons de la définition de cl_Δ

$$\begin{tikzcd}
1_X & p_{1!}\Delta_! 1_X \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "cl_\Delta * \vec{1_X}"] \arrow[d, "p_{1!}cl_\Delta"] & p_{1!}p_2^* f^! 1_Y \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\cong\ \mathrm{cobch}"] & f^* f_! f^! 1_Y = f^* f_! L \arrow[d, "f^* trg"] \\
& p_{1!}p_1^! 1_X \arrow[ul, "\substack{\text{counité} \\ \text{pour } p_{1!}\dashv p_1^!}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & p_{1!}p_1^! f^* 1_Y \arrow[r, "\substack{\text{counité} \\ \text{pour } p_{1!}\dashv p_1^!}"'] & f^* 1_Y = 1_X
\end{tikzcd}$$

Commute !

$\Longrightarrow (\mathrm{Adj}_1)$ $\quad 1_X \cong p_{1!}\Delta_! 1_X \longrightarrow p_{1!} p_2^* f^! 1_Y$ - - - - - - - 1_X

$\Longleftrightarrow 1_X \xrightarrow{cl_\Delta * 1_X} (\vec{1_X} * \overleftarrow{L}) * \vec{1_X} \cong \vec{1_X} * (\overleftarrow{L} * \vec{1_X}) \xrightarrow{\vec{1_X} * trg} \vec{1_X}$

est l'identité

$\overset{FM}{\Longrightarrow} (\mathrm{Adj}\,FM_1)$ $\quad f_! \xrightarrow{f_!\, FM_{cl_\Delta}} f_!(f^* f_! \otimes L) \xrightarrow{FM_{trg} \circ f_!} f_!$

$+ (\mathrm{Adj}\,FM_2^{\alpha,\beta}) \Longrightarrow \alpha = FM_{cl_\Delta}$

Alors

$(\mathrm{Adj}\,FM_2^{\alpha,\beta}) \Longrightarrow f^*\otimes L \xrightarrow{FM_{cl_\Delta}(f^*\otimes L)} p_{2!}(p_1^*(f^*\otimes L)\otimes p_2^* L) \cong f^*(-\otimes f_! L)\otimes L \xrightarrow{(f^*\otimes L)\,FM_{trg}} f^*\otimes L$

$\cong f^*(f_!(f^*\otimes L))\otimes L$

est l'identité,

évalué en $1_Y \Longrightarrow L \longrightarrow p_{2!}(p_1^* L \otimes p_2^* L) \cong f^*(f_! L)\otimes L \xrightarrow{(f^*\otimes L)\,trg} L$

$\cong f^*(f_! L)\otimes L$

est l'identité.

c'est $(\mathrm{Adj}\,2)$ $\square$

$\underline{\text{Ex.}}$ $\mathcal{C} = \mathrm{LCHaus}$ + applications continues

$\forall X \in \mathcal{C}$, $D(X) := D(X;\mathbb{Z}) = D(Ab(X)) \in \mathrm{Cat}_\infty$

$I = \{\text{immersions ouvertes}\}$ $\rightsquigarrow$ $i_! \dashv i^* =: i^!$

$P = \{\text{appli propres}\}$ $\rightsquigarrow$ $p^* \dashv p_* \overset{\simeq}{=} p_*$

$\rightsquigarrow$ formalisme des 3-foncteurs, même 6-foncteurs.

$\underline{\text{Prop.}}$ $X \xrightarrow{f} Y$ fibrée en variétés topologiques lisses $\Rightarrow$ f est D-coh-lisse

$\underline{\text{Dém.}}$ $D(X)$ satisfait la descente pour les recouvrements ouverts de X + $\exists$ $f^!$
$\Rightarrow$ D-coh. lissité est locale. $\qquad$ i immers.
$\Rightarrow$ on peut supposer $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{proj.}} \mathbb{R}^m$.

stabilité de D-coh lissité $\Rightarrow$ $\boxed{f : \mathbb{R} \to *}$ ou $f : * \to *$
par chg^t de base
& composition

$L = \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}[1] \in D(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathbb{R} \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{R} \arrow[dl, "f"] \\ & * & \end{tikzcd}$$

Constructions $\begin{cases} \alpha : \Delta_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}} \to p_2^* L = \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2}[1] & \text{dans } D(\mathbb{R}^2;\mathbb{Z}). \\ \beta : f_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}[1] \to \mathbb{Z} & \text{dans } D(*;\mathbb{Z}) \simeq D(\mathbb{Z}) \end{cases}$

tq. $\mathbb{Z} \simeq p_{1!}\Delta_! \mathbb{Z} \xrightarrow{p_{1!}\alpha} p_{1!}\mathbb{Z}[1] \simeq f^* f_! \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{f^*\beta} f^*\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}[1] \to p_{2!}(p_1^*\mathbb{Z}[1] \otimes \Delta_! \mathbb{Z}[1]) \xrightarrow{p_{2!}(-\otimes\alpha)} p_{2!}(p_1^*\mathbb{Z} \otimes p_2^*\mathbb{Z}[1]) \simeq f^* f_! \mathbb{Z}[1] \otimes \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{f^*\beta\otimes -} f^*\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[1] \simeq \mathbb{Z}[1]$

soient des isomorphismes.
(puis les modifier en identités)

(Fixons une orientation sur $\mathbb{R}$)

$\beta : f_! \mathbb{Z}[1] = R\Gamma_c(\mathbb{R}, \mathbb{Z})[1] \simeq \mathbb{Z}$

Il suffit que $p_{1!}\alpha$ ~~soient iso~~
& $p_{2!}\alpha$
soient des isomorphismes.

$\alpha :$ $j_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta} \to \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2} \to \Delta_* \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}$

$\Delta \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ diagonal. $j : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

$R\mathrm{Hom}(-, \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2}[1])$

$\Longrightarrow$

$$\begin{array}{ccccc}
R\mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2}, \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2}) & \to & R\mathrm{Hom}(j_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta}, \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2}) & \to & R\mathrm{Hom}(\Delta_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2}[1]) \\
\| & & \wr\| & & \| \\
 & & R\mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta}, j^* \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2}) & & \\
 & & \wr\| & & \\
R\Gamma(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{restriction}} & R\Gamma(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta, \mathbb{Z}) & \to & ? \\
\| & & & & \| \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{diag}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{différence}} & \simeq \mathbb{Z} \\
 & & (x, y) & \longmapsto & x - y
\end{array}$$

$\ni \underline{\underline{\alpha = \text{générateur}}}$

α n'est pas lui-même un iso car $\mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2}[1], \Delta_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}})$
$= H^0\big(R\Gamma(\mathbb{R}^2, \Delta_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}[-1])\big) = 0$

Mais $p_{1!}\alpha : \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}$

$p_{2!}\alpha : \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}$

En effet, par exemple pour $p_{1!}$, on a :

$$p_{1!}\quad \begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{diag}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{diff}} & \mathbb{Z} \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{diag}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{diff}} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad R\mathrm{Hom}(\Delta_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2}[1]) \xrightarrow[\simeq]{p_{1!}} R\mathrm{Hom}(p_{1!}\Delta_! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}, p_{1!}\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}^2}[1])$$

$\| \qquad\qquad \|$

$\mathbb{Z} \ni \alpha \qquad R\mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{R}})$

$\|$

$\mathbb{Z} \ni p_{1!}\alpha = \text{générateur}$, qui est un isomorphisme.

$\square$.